4) $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)}=-\frac{sin^2(y)}{\cos(y)}$ avec $y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=f(y)\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sin(y)}\Leftrightarrow \sin(y)=\frac{1}{x}$

$\Rightarrow (f^{-1})'(x)=-\frac{1}{x^2.\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{x.\sqrt{x^2-1}}$

EXERCICE№13

$f(x) = 1 - \tan x$

1) $f'(x) = -(1 + \tan^2 x) < 0$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

2) * f est continue et strictement décroissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$,

elle réalise donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $f(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)=]\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f,\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} f[$

$=]-\infty,+\infty[= IR$

3) $(f^{-1})(0)=\frac{\pi}{4}$; $(f^{-1})(2)=-\frac{\pi}{4}$

4) f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $f'(x)=-(1+\tan^2 x)\neq 0 ; \forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

d'où : f^{-1} est dérivable sur IR .

* soit $y=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow 1-\tan y=x \Leftrightarrow \tan y=1-x$

$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{f'(y)}=\frac{-1}{1+\tan^2 y}=\frac{-1}{1+(1-x)^2}=\frac{1}{-x^2+2x-2}$

5) $\lim_{x\to-(\frac{\pi}{2})^+} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=-\frac{\pi}{2}$ de même $\lim_{x\to-\infty} f^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}$

$(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ admet deux asymptotes horizontales d'équations respectives :

$y=-\frac{\pi}{2}$ et $y=\frac{\pi}{2}$

EXERCICE№14

$f(x)=\sqrt{\cos x}$; $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

1) $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{\sqrt{\cos x}}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\left(\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right).\frac{1}{\sqrt{\cos x}}$

$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\left(\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right)=\cos'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$

Qarray.tn Aqra Blech- Qarray.tn